ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1993

MATHEMATIQUES III

Option économique

Mercredi 19 mai 1993 de 14h à 18h

Sont autorisées :
- *Règles graduées.*
- *Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.*

Exercice 1: analyse et probabilités.

1°) Somme des carrés des coefficients binômiaux.
On considère un entier naturel n, et l'on pose:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k}.$$

a) Déterminer l'expression factorisée de u_n en calculant de deux façons le coefficient de x^n dans l'égalité polynômiale $(1 + x)^{2n} = (1 + x)^n(1 + x)^n$.
b) Soient A, B deux ensembles disjoints de cardinaux égaux à n.
Retrouver le résultat précédent en dénombrant de deux façons le nombre des parties à n éléments de la réunion A U B.

2°) Equivalent asymptotique des intégrales de Wallis.
On considère un entier naturel n, et l'on pose:

$$v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt.$$

a) Etudier le sens de variation de la suite (v_n).
b) A l'aide d'une intégration par parties, prouver la relation (R):

$$(R) \qquad (n+2)v_{n+2} = (n+1)v_n .$$

(on pourra utiliser le fait que $\sin^{n+2}(t) = \sin(t).\sin^{n+1}(t)$).

c) Etablir la double inégalité suivante:

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1.$$

En déduire que v_{n+1} et v_n sont équivalents lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Etablir que la suite $n \to (n+1)v_{n+1}v_n$ est constante, puis expliciter sa valeur. En déduire un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

e) A l'aide de la relation (R), calculer v_{2n} et vérifier enfin que:

$$v_{2n} = \frac{\pi}{2.4^n} u_n .$$

3°) Etude d'une suite d'expériences aléatoires.

On considère une suite d'expériences aléatoires dont chacune consiste à jeter simultanément deux pièces équilibrées. Pour tout entier naturel non nul n, on se propose de déterminer la probabilité p_n de l'événement E_n défini de la façon suivante: *"A l'issue de la $n^{ième}$ expérience, les nombres de "Face" amenés par les deux pièces sont égaux".*

a) Soient k, n deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$. Déterminer:

- la probabilité pour que le nombre de "Face" donné par une pièce équilibrée au cours de n jets de celle-ci soit égal à k.
- la probabilité p(n, k) pour que le nombre de "Face" donné par chacune des deux pièces à l'issue de la $n^{ième}$ expérience aléatoire soit égal à k.

b) Exprimer p_n en fonction de u_n, puis de v_{2n}, et en déduire un équivalent de p_n lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

4°) Nombre moyen de réalisations des événements E_k pour $k \leq n$.

Pour tout couple (k, n) d'entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n$, on note:

- B_k la variable aléatoire prenant pour valeur 1 si l'événement E_k est réalisé, et 0 sinon.
- $X_n = B_1 + B_2 + ... + B_n$ la variable aléatoire indiquant le nombre des entiers k ($1 \leq k \leq n$) pour lesquels l'événement E_k est réalisé, donc le nombre de fois où, durant les n premieres expériences, il y a eu égalité des nombres de "Face" amenés par les deux pièces.

a) Exprimer l'espérance de X_n en fonction de $p_1, p_2, ..., p_n$.

b) Etablir l'égalité suivante:

$$E(X_n) = \frac{(2n+1)C_{2n}^n}{4^n} - 1.$$

En déduire un équivalent de cette espérance lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2: algèbre et analyse.

On désigne par E l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et, l'on associe à tout élément f de E la fonction F = L(f) définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$F(x) = \int_0^1 tf(x-t)dt.$$

1°) Propriétés de la fonction F.

Effectuer le changement de variable défini par u = x - t dans l'intégrale définissant F(x).
En déduire que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser l'expression de F'(x).

2°) Un premier exemple.

Déterminer F(x) lorsque f(x) = exp(ax), où a est un nombre réel non nul donné.

3°) Un second exemple.

On considère pour tout entier naturel n les fonctions f_n: $x \to x^n$ et leurs images par L notées $F_n = L(f_n)$, et l'on désigne par E_n le sous-espace vectoriel constitué des fonctions-polynômes de degré inférieur ou égal à n.

a) Montrer que F_n appartient à E_n et exprimer F_n en fonction de $f_0, f_1, \ldots, f_n$.

b) A l'aide du résultat de la question 1, donner une expression de $F_n'(x)$.

En déduire une nouvelle expression de $F_n(x)$ ainsi qu'une forme simplifiée de:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+2}.$$

c) A tout élément $f = a_0f_0 + a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3$ de E_3 on associe son image par L que l'on convient de noter $F = A_0f_0 + A_1f_1 + A_2f_2 + A_3f_3$.

- Ecrire la matrice M de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) \quad \to \quad (A_0, A_1, A_2, A_3).$$

- La matrice M est-elle diagonalisable?
- Montrer que $(2M - I_4)^4 = 0$. En déduire que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de I_4, M, M^2, M^3.
- Exprimer en fonction de A_0, A_1, A_2, A_3 l'unique antécédent dans E_3 de la fonction $F = A_0f_0 + A_1f_1 + A_2f_2 + A_3f_3$.

4°) Un troisième exemple.

On considère la fonction f: $x \to 1 / [1 + |x|]$ et son image par L notée F.

a) Prouver que, pour tout nombre réel x, on a $0 \leq F(x) \leq 1/2$.

b) Expliciter F(x) en distinguant les cas $x \leq 0$, $0 < x < 1$, $1 \leq x$.

c) Etablir sans calcul de dérivée que F est croissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$.

d) Déterminer les limites de F(x) quand x tend vers $-\infty$ et $+\infty$, et donner un équivalent de F(x) dans ces deux cas.

e) Calculer F'(x) et F"(x) pour $0 < x < 1$. En déduire les variations de F sur $\mathbb{R}$, puis tracer sa courbe représentative.

***